Diversitas Journal
ISSN 2525-5215
Volume 9, Issue 3 (Out./Dez. 2024) p. 1892 – 1912
https://diversitasjournal.com.br/diversitas_journal

Fundamentals of Mathematics: Logical-Philosophical Concerns

Fundamentos da Matemática: Inquietações Lógico-Filosóficas

COSTA, Carlos André Duarte (1); LOPES NETA, Natercia de Andrade (2)

(1) 0000-0002-2035-8080; Universidade Estadual de Alagoas, Professor Auxiliar do Curso de Licenciatura em Matemática. Brasil. E-mail: carloscosta@uneal.edu.br
(2) 0000-0002-5532-9300; Universidade Estadual de Alagoas, Professora Adjunta do curso de licenciatura em Matemática. Brasil. E-mail: natercia.lopes@uneal.edu.br

A B S T R A C T

This literature review presents a systematization of the concepts that underlie mathematics, showing the connections between the philosophy of science and logic. To conduct this literature review, databases such as Scopus, Web of Science and Google Scholar were consulted, aiming to obtain a broad and robust coverage of the fundamental concepts that relate mathematics to the philosophy of science and logic. It was argued that the teaching of Mathematics can advance in contributions to the philosophical basis so that the student realizes that this science is dynamic, and that its nature is composed of elements that allow for logical-philosophical debate, providing yet another alternative for the construction of knowledge.

R E S U M O

O presente trabalho de revisão de literatura apresenta uma sistematização dos conceitos que fundamentam a matemática, mostrando as conexões entre a filosofia das ciências e a lógica. Para realizar esta revisão de literatura, foram consultadas bases de dados como Scopus, Web of Science e Google Scholar, visando obter uma cobertura ampla e robusta dos conceitos fundamentais que relacionam a matemática com a filosofia das ciências e a lógica. Argumentou-se que o ensino de Matemática pode avançar em contribuições na base filosófica para que o aluno perceba que essa ciência é dinâmica, e que sua natureza é composta de elementos que permitem o debate lógico-filosófico proporcionando mais uma alternativa para a construção do conhecimento.

INFORMAÇÕES DO ARTIGO

Histórico do Artigo:
Submetido: 25/10/2023
Aprovado: 04/11/2024
Publicação: 07/11/2024

Keywords:
Fundamentals of Mathematics, Set Theory, Logic, Philosophy

Palavras-Chave:
Fundamentos da Matemática, Teoria de Conjuntos, Lógica, Filosofia

DOI: 10.48017/dj.v9i4.2837

Introdução

O que é a Matemática? Quais as contribuições de Zermelo, Fraenkel, Neumann, e Gödel para a formação do pensamento Matemático? Sabemos que a Matemática é resultado da união de diversos componentes que raramente são apresentados de forma conectada e em uma mesma obra literária. Esses componentes precisam ser extraídos e modelados da filosofia da ciência, da filosofia da matemática, da lógica e, naturalmente, da própria matemática.

Grande parte da história da Matemática é feita por gente anônima, contributos de filósofos e matemáticos do passado e do presente que se debruçam sobre desafios na busca obstinada pelas demonstrações.

A Matemática é como tijolos em uma grande construção, mas o alicerce dela está fundamentado em alguns componentes estruturados durante a história (BALESTRI, 2020). A interdisciplinaridade entre matemática e filosofia é a chave do processo, mas abordar as conexões entre esses mundos requer um vasto detalhamento histórico das diversas correntes de pensamento como o logicismo, o intuicionismo, o formalismo e apresentar todos os elementos necessários para uma fundação de Matemática.

Para Deleuze e Guattari (2010), todas as formas do saber são formas de pensamento, a filosofia produz pensamento, mas isso não é privilégio da filosofia, a Matemática é um saber que converge para a ideia de componente colocado por esses filósofos, mas não assimilado por eles, porque há uma distinção das formas de criação que caracterizam os vários saberes. Seguindo esses passos, apresentamos uma sistematização dos conceitos que descreve e/ou define a fundação de Matemática mais usual e difundida nos livros de matemática e lógica, organizada filosoficamente.

Para este artigo, foram selecionados estudos que abordam o caráter dinâmico da matemática e suas conexões filosóficas, proporcionando um panorama sobre como a lógica e a filosofia contribuem para a compreensão dos conceitos matemáticos. Argumentamos que o ensino da Matemática pode se beneficiar de uma base filosófica, ajudando os alunos a perceberem a matemática como uma ciência dinâmica, com elementos que possibilitam um debate lógico-filosófico. Esta abordagem, portanto, oferece uma alternativa pedagógica que contribui para a construção do conhecimento de forma mais ampla e interativa.

A matemática, em sua essência, é uma ciência marcada pela abstração, pela formalização e pelo rigor lógico, e sua história está profundamente entrelaçada com o desenvolvimento do pensamento filosófico. Desde os tempos antigos, questões sobre a natureza dos números, das figuras geométricas e da própria estrutura do raciocínio matemático despertaram a curiosidade de filósofos e matemáticos, que buscavam entender não apenas "como" fazer matemática, mas "o que" é a matemática e qual seu papel no conhecimento humano. Filósofos gregos, como Platão e Aristóteles, deram os primeiros passos nessa direção, questionando se os objetos matemáticos existiam de forma independente do mundo físico ou se eram criações da mente humana.

Durante a Idade Média, a matemática permaneceu em grande parte associada à lógica e à filosofia natural, ganhando status e relevância nas universidades europeias. Já na Idade Moderna, com o surgimento de figuras como Descartes, Newton e Leibniz, a matemática se transformou em um pilar essencial para a ciência, sendo fundamental para o desenvolvimento do método científico. Nesse período, questões filosóficas sobre a fundamentação da matemática começaram a se aprofundar, envolvendo a necessidade de definir claramente conceitos matemáticos e a relação entre a matemática e a realidade observável. A busca por um sistema matemático consistente e completo, capaz de explicar as verdades universais, culminou em uma série de debates e estudos que moldaram a ciência moderna.

No século XIX, a matemática passou por uma formalização intensa, principalmente nas áreas de lógica e aritmética, marcando o início da chamada "crise dos fundamentos". Teóricos como Frege, Russell e Hilbert se dedicaram a sistematizar a matemática, procurando estabelecer uma base lógica sólida e universal. Essa busca culminou com o surgimento de escolas filosóficas como o logicismo, o formalismo e o intuicionismo, cada uma oferecendo respostas diferentes para as perguntas fundamentais da matemática. No entanto, o trabalho de Kurt Gödel, com seus famosos teoremas da incompletude, abalou as esperanças de um sistema matemático totalmente fechado e autoconsistente, revelando os limites das fundações lógicas e introduzindo novas questões sobre a natureza da verdade e da prova em matemática.

No contexto contemporâneo, a matemática continua a ser um campo de intensas discussões filosóficas. A natureza dos conceitos matemáticos, a validade de métodos não-estritamente lógicos e a aplicabilidade da matemática em outras ciências são temas que permanecem em debate. Ao mesmo tempo, essas discussões têm repercussões importantes para o ensino de matemática, sugerindo que, mais do que uma prática de fórmulas e algoritmos, a matemática pode ser entendida como uma atividade dinâmica, que envolve pensamento crítico, debate e uma reflexão constante sobre sua própria estrutura.

Diante desse cenário, este trabalho tem como objetivo apresentar definições sistemáticas dos fundamentos da Matemática, mostrando as conexões entre a filosofia das ciências e a lógica. A partir de uma revisão bibliográfica demonstrou-se como essas bases filosóficas podem enriquecer o ensino da matemática, ajudando a desmistificar sua imagem de ciência rígida e estática e incentivando um entendimento mais profundo e dinâmico de sua natureza.

Percurso Metodológico

Para a realização desta revisão de literatura, adotamos uma metodologia de revisão bibliográfica sistemática. Essa abordagem envolveu a seleção criteriosa de estudos e publicações que abordam a matemática em suas bases filosóficas e lógicas, visando sistematizar os conceitos fundamentais dessa ciência e suas inter-relações com a filosofia das ciências e a lógica.

Foram pesquisadas as bases de dados Scopus, Web of Science e Google Scholar, escolhidas por sua abrangência e relevância na área. Nessas bases, utilizamos palavras-chave como "filosofia da matemática", "lógica matemática", "epistemologia" e "ensino de matemática" para identificar publicações alinhadas aos objetivos da pesquisa.

Os critérios de inclusão dos estudos focaram em publicações que explorassem os elementos conceituais da matemática em perspectiva filosófica, além de pesquisas que discutem o papel da lógica e da epistemologia na construção do conhecimento matemático. Excluímos estudos que não apresentavam discussões teóricas consistentes ou que se restringiam a análises empíricas sem fundamentação filosófica.

Após a seleção, os textos foram analisados para extrair e organizar os conceitos-chave que sustentam a matemática como uma ciência dinâmica e passível de debates lógico-filosóficos. Argumentamos que essa perspectiva pode enriquecer o ensino de Matemática, ao permitir que os alunos compreendam sua natureza em constante desenvolvimento e suas múltiplas conexões filosóficas, criando um ambiente mais propício à construção do conhecimento.

Componente 1: Linguagem

A caminhada começa pela definição de uma linguagem capaz de "falar" dos objetos matemáticos com rigor e sem as ambiguidades que uma linguagem natural tem. Para Deleuze e Guattari (1995, p.7-8),

> A unidade elementar da linguagem — o enunciado — é a palavra de ordem. Mais do que o senso comum, faculdade que centralizaria as informações, é preciso definir uma faculdade abominável que consiste em emitir, receber e transmitir as palavras de ordem.

Neste sentido, ser a linguagem o primeiro componente dos fundamentos em Matemática, implica em dizer que daí será dado o norte para a concretude de objetos que são puramente abstratos. Os símbolos que definem a linguagem matemática são apenas ideias que se materializam no mundo.

Ainda segundo Deleuze e Guattari (2010, p. 23),

> Não há conceito simples. Todo conceito tem componentes, e se define por eles. Tem, portanto uma cifra. É uma multiplicidade, embora nem toda multiplicidade seja conceitual. Não há conceito de um só componente: mesmo o primeiro conceito, aquele pelo qual uma filosofia "começa", possui vários componentes, já que não é evidente que a filosofia deva ter um começo e que, se ela determina um, deve acrescentar-lhe um ponto de vista ou uma razão.

A disciplina que trata dos sinais que constituem uma linguagem é chamada de semiótica e a semiose é uso desses sinais. A semiótica apresenta três dimensões: “1. Os sinais em si mesmos; 2. Os objetos designados pelos sinais; 3. As pessoas que empregam os sinais.” (COSTA, 1992, p. 69). Além disso, com referência aos sinais e à semiose, os sinais, pelo menos em casos complexos, envolvem três tipos de relações: relacionam-se com objetos, pessoas e outros sinais (COSTA, 1992, p. 70).

Buscando facilitar (simplificar) os conceitos da semiótica, podemos dividi-la em sintática, semântica e pragmática. A sintática trata da combinação dos objetos da linguagem, ou seja, da sua morfologia. A semântica diz respeito ao significado desses objetos (interpretação de uma palavra, de uma fórmula lógica etc.). E por fim, a pragmática considera, além da construção e significado dos símbolos em si, as pessoas conectadas à semiose.

No contexto da semiótica precisamos “extrair” os elementos necessários para designar os objetos matemáticos. Os primeiros passos na construção de uma linguagem formal foram dados por Platão, Aristóteles, Leibniz e Kant (SILVA, 2007). Gottlob Frege é figura central devido ao seu projeto logicista: Fundamentos da Aritmética, lançado em 1884, onde tentava formalizar a matemática.

Aqui começamos a falar da linguagem da teoria de conjuntos, que é lógica de primeira ordem. Ela é constituída por um alfabeto e por fórmulas. O alfabeto é composto por variáveis: letras minúsculas $x, y, z, \ldots$ que podem ser indexadas por números; conectivos: $\neg$ (negação), $\rightarrow$ (condicional); quantificador: $\forall$ (quantificador universal); parênteses: são os parênteses esquerdo e direito e serve como pontuação; predicados binários: $=$ (igualdade) e $\in$ (pertence). As fórmulas são sequências finitas de símbolos do alfabeto e segue o seguinte conjunto de regras:

1. Se x e y são variáveis, $x \in y$ e $x = y$ são fórmulas;
2. Se L e M são fórmulas, $\neg(L), (L) \rightarrow (M)$ são fórmulas;
3. Se L é fórmula e x é uma variável, então $\forall x(L)$ é fórmula;
4. Todas as fórmulas podem ser construídas usando os itens 1, 2 e 3.

Quando vamos elaborando fórmulas e essas vão ficando extensas e/ou complexas, precisamos adicionar outros símbolos que possam simplificar essas expressões maiores. Por exemplo, podemos simplificar a fórmula $\forall z((z \in x) \rightarrow (z \in y))$ da seguinte maneira: $x \subset y$, que está dizendo que x está contido em y se todo elemento de x pertence a y. Outra maneira de simplificar é usando constantes, que correspondem na linguagem natural aos nomes próprios.

Completando os mecanismos de simplificação, já que estamos usando a lógica de primeira ordem, os demais conectivos básicos, podem ser deduzidos da seguinte forma:

- $\vee$ (disjunção): (A) $\vee (B)$ é a abreviatura de $\big(\neg(A)\big) \rightarrow (B)$;
- $\wedge$ (conjunção): $(A) \wedge (B)$ é a abreviatura de $\neg((\neg(A)) \vee (\neg(B))$;
- $\leftrightarrow$ (bicondicional): $(A) \leftrightarrow (B)$ é a abreviatura de $\big((A) \rightarrow (B)\big) \wedge \big((B) \rightarrow (A)\big)$;
- $\exists$ (quantificador existencial): $\exists x(A)$ é a abreviatura de $\neg(\forall x(\neg(A)))$.

Em 1929, Kurt Gödel demonstrou que a lógica de primeira ordem (linguagem da matemática) é completa e consistente, ou seja, que todas as fórmulas logicamente válidas podem ser derivadas dentro do sistema sem a necessidade de se adicionar novas regras de inferência. A demonstração é conhecida como o teorema da completude de Gödel (ROQUE, 2012).

Vimos aqui que precisamos ter bem claras as ideias que usamos na Matemática, que muitas vezes a simplificação de termos é uma tentativa de tornar essa linguagem mais acessível sem perder sua essência.

Essa linguagem precisa estar bem definida para que não haja erro na ideia do que estamos falando, para isso padrões e símbolos foram criados para uma linguagem dita universal.

Componente 2: Definições

Para Scheinerman, "os objetos matemáticos adquirem existência por meio de definições. Por exemplo, um número é chamado de primo ou par desde que satisfaça a condições precisas, sem ambiguidade" (SCHEINERMAN, 2011, p. 5). Nesse ponto, nossa busca é por um componente que tenha um caráter legislador, mas que no contexto da matemática é obrigado a não permitir múltiplas interpretações para um mesmo fato. Se algo é ilegal em uma determinada ocorrência que diz respeito a um assunto ou área da matemática, então será ilegal para todas as ocorrências em qualquer área da matemática. Além disso, os termos "críticos" que constituem uma determinada definição precisam estar a princípio definidos. Por exemplo:

- Um número inteiro é chamado par se for divisível por 2.

Contudo, entendemos como na filosofia, que "não há conceitos simples. Todo conceito tem componentes e se define por eles. Tem, portanto uma cifra. É uma multiplicidade, embora nem toda multiplicidade seja conceitual" (DELEUZE; GUATTARI, 1992, p.23). Nessa definição de número par, além de palavras da linguagem natural, temos três termos que chamam atenção: inteiro, divisível e o número 2. Quando falamos de uma fundação de Matemática, o que queremos dizer é que é necessário ter uma base, um alicerce, uma fundação de onde se constrói todo o resto. Nesse sentido, o número 2 está na base da teoria, pois logo no primeiro estágio pode ser representado como um conjunto, e os conjuntos, por sua vez, são objetos primitivos em ZFC (tudo é conjunto) e não são definidos. Suas existências estão garantidas na medida em que se submetem aos axiomas de ZFC. Fora disso, estamos a margem das regras do “jogo” chamado Matemática. Assim quando se trata de definições, conforme Scheinerman (2011, p. 5),

> este é um jogo que não podemos ganhar inteiramente. Se cada termo for definido em termos mais simples, estaremos continuamente em busca de definições. Deve chegar um momento em que dizemos: “Este termo é indefinível, mas cremos entender o que ele significa.

Buscando caracterizar o conceito de definição no âmbito das ciências formais, segundo Sant’Anna (2005, p. XV),

> distinguem-se duas classes de definições: as abreviativas e as ampliativas. As primeiras constituem simplesmente processos que auxiliam na exposição das teorias, não ampliando suas linguagens. São de duas categorias: as simples, que substituem grupos complexos de símbolos por um símbolo novo, e as contextuais, que introduzem símbolos novos, como abreviações, em certos contextos. Em princípio, essas definições são elimináveis, já que não passam de técnicas auxiliares na construção de teorias. Como dizia Russell, são convenções tipográficas.

Para finalizar os estudos sobre definição, vamos abordar, rapidamente, os conceitos fundamentais de três teorias sobre o conceito de definição contidas em Wolenski e Kohler (1999).

1. Teoria de Lesniewski

Para Lesniewski, toda definição só é criada quando ocorre à introdução de um novo símbolo na linguagem de uma determinada teoria. Assim, se temos uma formula F que introduz um símbolo novo ***s*** nessa teoria, então dois critérios precisam ser satisfeitos:

- “Critério da eliminabilidade: significa que ao se escrever uma fórmula usando um dado conceito definido, a mesma pode ser reescrita de forma equivalente sem qualquer menção explícita a esse conceito” (SANT’ANNA, 2005, p. 18);

- "Critério da não-criatividade: significa ser impossível de se obter novos resultados a partir da definição" (SANT'ANNA, 2005, p. 18).

2. Teoria de Tarski

Na matemática o conceito de estrutura é definido como sendo um par ordenado (conjunto), onde temos para primeiro elemento, um conjunto e para o segundo, um conjunto de relações. Uma coleção de estruturas é chamada de espécie e satisfaz certas condições que são os axiomas da espécie. Por exemplo, se a linguagem a ser trabalhada é a de primeira ordem (linguagem de ZFC). Nas palavras de Sant'Anna (2005, p. 30),

> Chamemos essa linguagem de Λ. Seja ainda $e = \langle D, R \rangle$ uma interpretação para Λ. Um conjunto X de $\boldsymbol{e}$ é dito definível segundo Tarski se, e somente se, existe uma fórmula bem formada $\varphi(y)$ em Λ com apenas uma ocorrência livre de uma variável y, tal que $x \in X$ se, e somente se, x satisfaz tal fórmula. Assim sendo, dizemos que a fórmula $\varphi(y)$ define o conjunto X.

3. Princípio de Padoa

Partindo dos conceitos de definição de Lesniewsli e Tarski, o princípio de Padoa segundo Beth (1953, p. 330),

> Seja S uma teoria axiomática cujos conceitos primitivos (excluindo constantes lógicas) são, $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Tais conceitos, como já foi dito, podem ser constantes individuais, relações, operações ou conjuntos. Um dado conceito c_i é independente (não-definível) dos conceitos $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1,}\ c_n$ se, e somente se, existem dois modelos de S nos quais $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1,}\ c_n$ têm a mesma interpretação; mas as interpretações de c_i nestes modelos são diferentes.

Essas três teorias nos mostram que uma definição "há, no mais das vezes, pedaços ou componentes vindos de outros conceitos, que respondiam a outros problemas e supunham outros planos" (DELEUZE; GUATTARI, 1992, p.26), nestas convergências temos ligações onde agrupamos as definições no que denominamos de conjuntos.

Componente 3: Conjuntos

Vamos começar a discutir a noção de conjunto de uma forma intuitiva, no sentido de que é um conceito primitivo dentro da teoria. Então a ideia, a princípio, é tratar os conjuntos como uma coleção qualquer de objetos ou elementos que são distintos. Essa concepção é conhecida como teoria ingênua de conjuntos (ROQUE, 2012) e foi desenvolvida nos anos de 1874 a 1895 pelo grande matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor.

Conforme Sant'Anna (2007, p. 1)

> A ideia intuitiva de que um conjunto é uma coleção de objetos, não era novidade. A surpresa introduzida por Cantor foi a ideia de que infinidades podem ser tratadas como objetos bem definidos, bem delineados, em algum sentido. Ou seja, Cantor estava particularmente interessado nos conjuntos infinitos, o que o levou até mesmo a classificar diferentes tipos de infinidades.

Para Cantor, o conjunto é um agrupamento compacto não-enumerável que todos os pontos são de acumulação e com interior vazio (BOYER; MERZBACH, 2012). Conjuntos não-enumeráveis são aqueles que não possuem uma bijeção, ou seja, não conseguimos relacionar os elementos de um conjunto com o outro, por exemplo, eu tenho crianças no parque e quantidade insuficiente de bolas para elas. Mas, Cantor trabalhava com conjuntos infinitos.

Segundo Cantor existem infinitos maiores que outros infinitos, tudo seria explicado pela correspondência bijetora, uma parte não é menor que um todo, mas se um conjunto é finito (cardinalidade definida) a parte sempre é menor que um todo (DELAHAYE, 2006).

As definições de infinito de Cantor e o agrupamento em conjuntos se assemelham ao que Deleuze e Guattari (1995, p. 202) defendia do infinito como horizonte absoluto da atividade de pensar, como o ilimitado e incomensurável, e também como o infinitamente pequeno dentro do que tem limites, ou como o infinitamente variável a partir de um conjunto finito.

> Pedimos apenas um pouco de ordem para nos proteger do caos. Não há nada mais doloroso, mais angustiante do que um pensamento que foge de si mesmo, do que ideias que fogem, que desaparecem mal delineadas, já roídas pelo esquecimento ou precipitadas em outras ideias que também não dominamos. São variabilidades infinitas cujo desaparecimento e aparecimento coincidem. São velocidades infinitas que se confundem com a imobilidade do nada incolor e silencioso que viajam, sem natureza ou pensamento. É o momento do qual não sabemos se é muito longo ou muito curto para o tempo. Recebemos cílios que racham como artérias. Incessantemente perdemos nossas idéias. É por isso que tentamos tanto manter as opiniões estabelecidas. Pedimos apenas que nossas ideias sejam concatenadas de acordo com um mínimo de regras constantes, e a associação de ideias nunca teve outro significado, para nos fornecer essas regras de proteção, semelhança, contiguidade, causalidade, que nos permitem colocar um pouco de ordem em as ideias, movem-se de uma para

a outra de acordo com uma ordem de espaço e tempo.

No início do século XX problemas graves relativos aos fundamentos da matemática surgem via paradoxos tanto na lógica, como na teoria de conjuntos. Bertrand Russell (2007) começou a estudar, em 1902, a obra de Gottlob Frege, Grundgesetze der Arithmetik, e esse momento da história da matemática é crucial e teve seus principais desdobramentos até os anos de 1930, mas certamente ainda é um ponto chave em qualquer estudo que busque formalizar e/ou apresentar uma Fundação de Matemática (ROQUE, 2012). Russel encontrou uma contradição no sistema proposto na obra de Frege, que ficou conhecido como "O Paradoxo de Russel". Vamos a ele:

Seja z o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprio. Na teoria de Cantor, temos: $R = \{x \mid x \notin x\}$. Esse conjunto vai levar a seguinte contradição: $R \in R \leftrightarrow R \notin R$. Aqui, caro leitor, precisamos de um pouco de lógica para provarmos que de fato temos uma contradição. Considere o seguinte conjunto:

$R = \{x \mid x \text{ é regular}\}$. Onde regular = ($x \notin x$). Surge então a seguinte pergunta: R é regular? Temos duas respostas possíveis

1. Se $R \in R$, então $R \notin R$, pois ele não tem a propriedade de ser regular, que é a de não pertencer a si mesmo ($x \notin x$)
2. Se $R \notin R$, então $R \in R$, pois ele tem a propriedade de ser regular, que é a de não pertencer a si mesmo ($x \notin x$)

Em ambos os casos temos uma contradição.

Na demonstração acima, propositalmente, foi omitido um pequeno detalhe. Vamos fazer uma nova demonstração que corrige essa falha.

$R = \{x \mid x \text{ é conjunto e é regular}\}$. Façamos a mesma pergunta da demonstração anterior

1.1 Se $R \in R$, então R é um conjunto e é regular. Pelo conectivo "e" as duas afirmações precisam ser verdadeiras. Isso implica que o item 1.1 leva a uma contradição, pois temos que $R \notin R$, igual ocorreu no item 1.

1.2. Se $R \notin R$, então R não é conjunto ou não é regular. Pelo conectivo "ou" uma das duas afirmações precisa ser falsa. Pelo item 2 a segunda parte da afirmação (não é regular) leva a $R \in R$ e também temos uma contradição.

Definida a natureza do conjunto por Cantor, é importante falar de David Hilbert (HILBERT, 1899), ele é o expoente máximo na defesa pela formalização da matemática. Sua obra que tratou dos fundamentos da geometria Grundlagen der Geometrie, publicada em 1899 deixa claro o rigor que ele buscava para a matemática. Em suma, sua meta era obter um sistema axiomático que deveria satisfazer três condições: consistência, completude e independência.

Componente 4: Axiomas

Axioma é um dogma na Matemática, uma verdade de fé. Não precisa de demonstração. É uma extensão do item anterior e vem para contornar os paradoxos, em especial o de Russel, assim precisamos estabelecer as condições sobre a natureza de um conjunto e as formas como podemos construí-los sem que surjam paradoxos.

As ideias pioneiras de Cantor permitiam resultados que iriam contra a intuição e trazia problemas críticos aos fundamentos da matemática (DAUBEN, 1990). Sua teoria de conjuntos foi definida pelos seguintes axiomas:

Axioma 1. Extensionalidade: Um conjunto fica determinado, unicamente, por seus elementos. Assim conjuntos como $A = \{3,5,7,9\}$ e $B = \{5,7,3,9\}$ são iguais. Também são iguais $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,1,1,2,2,2,3,4\}$. A ordem e a repetição dos elementos não têm relevância.

Axioma 2. Compreensão: Ele garante que toda fórmula lógica $\varphi(x)$ cria um novo conjunto. Denotamos a criação de um conjunto C, como $\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \mid \varphi(\mathrm{x})\}$.

O pensamento de Cantor se voltava para o que é real e o que é ilusão na Matemática, em sua teoria de conjuntos ele rejeitou vários axiomas, porque para ele, assim como percebemos em Deleuze (1962, p. 118) "não há verdade que, antes de ser verdade, não seja a efetuação de um sentido ou a realização de um valor". Sua teoria interpreta proposições sobre objetos matemáticos como números e funções, e fornece um conjunto padrão de axiomas para provar ou refutar os dados.

A teoria de Zermelo-Fraenkel (ZF) de conjuntos é uma teoria formal axiomática. Ela é apresentada em uma linguagem de primeira ordem (ver componente 1) e todos os objetos nela são conjuntos. Zermelo e Fraenkel buscam mapear as ideias apresentadas na teoria de Cantor, eliminando as inconsistências.

Nesse momento, precisamos esclarecer uma questão que é capaz de mostrar com maior exatidão a ideia de uma fundação de Matemática. Conforme Sant'Anna (2007, p. 47),

> Existem muitas teorias formais de conjuntos na literatura. Algumas são formuladas em linguagens de primeira ordem, outras em linguagens de ordem superior [...]. Outras ainda são formuladas em linguagens que não fazem uso de conectivos lógicos, nem de quantificadores e nem de variáveis [...], enquanto há também aquelas que são fundamentadas em lógicas não clássicas [...]. Enfim, a imaginação é o limite. Para ilustrar a ideia das vantagens da formalização, discute-se aqui a mais usual das teorias formais de conjuntos, a saber, a de Zermelo-Fraenkel (ZF). Em nenhum sentido preciso ZF é melhor ou pior do que outras propostas conhecidas. É simplesmente a mais usual por ser historicamente uma das primeiras, permitir uma fundamentação precisa de vastos campos da matemática, ser muito intuitiva se comparada com as ideias originais de Cantor e também por ser amplamente divulgada em muitos livros importantes de lógica.

A teoria axiomática de conjuntos ZF junto com o axioma da escolha (Choice) é conhecida como ZFC e além de ter Zermelo e Fraenkel como os grandes idealizadores, teve a participação decisiva na sua evolução e amadurecimento de Thoralf Skolem, Dmitry Mirimanoff e Jonh Von Neumann. Vamos aos axiomas de ZFC:

1. Axioma da extensionalidade (ZFC1): todo conjunto fica unicamente determinado por seus elementos

Esse axioma estabelece uma relação entre igualdade e pertinência e fala explicitamente sobre a natureza dos conjuntos, da comparação com outros conjuntos e traz consigo outros conceitos. Se dois objetos não são iguais, então resta: serem disjuntos, um ser subconjunto do outro ou existir uma intersecção entre eles. Esses três elementos estão relacionados com o sentido de pertinência

2. Axioma da Fundação (ZFC2): "para todo conjunto A não vazio existe um elemento x disjunto de A" (SANTOS, 2007, p. 92).

O axioma da fundação também trata da natureza dos conjuntos e proíbe a existência de certos "conjuntos" estranhos, exemplo da teoria de Cantor e qualquer conjunto que atende esse axioma é dito bem fundado. Assim:

- $E = \{E\}$, $B = \{\{b\}, B\}$, não são conjuntos na teoria axiomática de ZFC;
- Cadeias infinitas como $x \in x \in x \in x \cdots$ também são proibidas por ZFC2.

3. Axioma da Substituição (ZFC3): "dada uma proposição π binária tal que, $\forall x(\pi(x,y) = \pi(x,z) \rightarrow y = z)$ isto é, a proposição define uma função cujo domínio é o conjunto A, então a imagem do conjunto A pela função definida por π também é um conjunto denominado de imagem de A pela função π." (SANTOS, 2007, p. 92). Assim temos uma função $\pi(x,y)$ que recebe os elementos de um conjunto A (domínio) e a sua imagem pela função definida por π também é um conjunto. Esse axioma é na verdade um esquema de axiomas, pois para cada função π ganhamos um novo axioma.

O axioma da substituição, dado sua complexidade e aplicação somente em tópicos avançados da teoria, pode ser apresentados numa versão mais simples e que é chamado de Axioma da Separação (em ZFC ele é um teorema). "Tal esquema de postulados é muito ardiloso foi a solução que Zermelo encontrou para evitar certos paradoxos, como o de Russel" (SANT'ANNA, 2007, p. 51). A nova versão de Zermelo para o axioma 2 de Cantor ficaria assim: $R = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$. Aqui fica estabelecido que só podemos construir novos conjuntos a partir de um conjunto pré-estabelecido. Vamos voltar ao paradoxo de Russel e ver o que acontece:

$R = \{x \in A \mid x \notin x\}$

- $R \in R$, então $R \in A$ e $R \notin R$. A segunda condição leva a uma contradição e como temos uma conjunção, toda a sentença está invalidada;
- $R \notin R$, então $R \notin A$ ou $R \in R$. A segunda condição leva a uma contradição, mas temos uma disjunção. Assim o junto R definido pela formula $x \notin x$ são todos os objetos que não estão em A. Usando o axioma da separação pode-se provar que o conjunto universo não é um conjunto em ZFC e também mostrar a existência e unicidade do conjunto vazio ($\emptyset$), que em muitas obras é apresentado como um axioma (Axioma do Vazio). Aqui ele é um teorema em ZFC.

4. Axioma da Potência (ZFC4): Garante a existência do conjunto das partes de um conjunto dado. Esse novo conjunto é denotado por $R = \mathcal{P}(A)$. Por exemplo, se $A = \{1,2,3\}$, então $\mathcal{P}(A = \{\emptyset, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. Esse axioma começa a clarear a "natureza" da Matemática, mostrando que existe diversos níveis de infinito.

Por exemplo: o conjunto dos números naturais é enumerável e o conjunto dos números reais não é enumerável, ou seja, não é possível existir uma bijeção entre esses dois conjuntos.

Com ZFC3 e ZFC4 podemos deduzir que dado dois conjuntos quaisquer podemos formar um novo conjunto que possui como elementos esses dois conjuntos. Por exemplo, se a e b são conjuntos, então {a, b} também é um conjunto. Na maioria dos livros que trata do tema, essa construção de conjuntos é apresentada como o Axioma do Par. Aqui ele foi introduzido como um teorema em ZFC.

5. Axioma da União (ZFC5): "Para cada conjunto, sua união (a coleção de todos os membros dos seus membros) é um conjunto" (TSOUANAS, 2021, p. 521). Para uma melhor compreensão desse axioma, vamos mostrar dois exemplos:

▪ Se $R = \{1, \{2,3\}, 4, \{5,6,7\}\}$ então $A = \cup(R) = \{2,3,5,6,7\}$
▪ Se $R = \{1,3,5,7,9,11,13\}$ então $A = \emptyset$. R não tem membros de membros como elementos.
Com os axiomas de ZFC até aqui apresentados podemos definir a interseção e a união entre conjuntos. Além disso, usando os axiomas da União, da Potência e da Separação é possível definir o produto cartesiano entre dois conjuntos quaisquer de ZFC.

6. Axioma do Infinito (ZFC6): "Existe um conjunto que tem o $\emptyset$ como membro e é fechado para a operação x^+" (TSOUANAS, 2021, p. 535).
Aqui precisamos esclarecer essa "coisa" denotada por x^+. O conjunto sucessor de um conjunto x é definido como: $x^+ \overset{\text{def}}{=} x \cup \{x\}$. Essa definição é devido a Von Neumann.

▪ O axioma do infinito permite a construção de conjuntos da forma:

1. $\emptyset$
2. $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
3. $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

▪ Esses conjuntos são os tijolos para a construção dos Naturais, ou seja, os números como conhecemos são uma representação de conjuntos dentro de ZFC. Assim, podemos simplificar os conjuntos acima da seguinte forma:

1. $0 \overset{\text{def}}{=} \emptyset$
2. $1 \overset{\text{def}}{=} 0^+ = \emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
3. $2 \overset{\text{def}}{=} 0^{++} = \emptyset^{++} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Isso implica que em ZF existe um conjunto cujos elementos são 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Esse conjunto é infinito conforme a definição de Dedekind: "Seja um conjunto A. chamamos o A de Dedekind-infinito se e somente se ele pode ser "injetado" para um subconjunto próprio dele" (TSOUANAS, 2021, p. 535).

Além disso, conforme Coniglio (1997, p. 46),

> É fundamental perceber que este axioma separa claramente a Aritmética (que pode ser realizada sem assumir a existência de sequências infinitas) de outras disciplinas da Matemática avançada, tais como Análise, que fazem um uso essencial do Axioma da Infinidade.

7. Axioma da Escolha (ZFC7): “dado um conjunto z cujos elementos são não vazios e dois a dois disjuntos, então existe um conjunto de escolhas u, que tem exatamente um membro em comum com cada elemento de z” (CONIGLIO, 1997, p. 48)

Tentando aclarar as coisas, segundo Sant’Anna (2007, p. 57),

> Grosso modo, se x é um conjunto cujos elementos são conjuntos não-vazios e disjuntos quando tomados dois a dois, então existe um conjunto y formado da seguinte maneira: a partir de cada elemento de x “tira-se" um e apenas um elemento arbitrário w para se tornar elemento de y. Por isso que se diz que a interseção entre y e cada elemento z de x é um conjunto unitário $\{w\}$.

- “Observe que, embora u “escolha” um elemento de cada membro de z, o axioma nada diz respeito à existência de um procedimento efetivo para realizar esta escolha” (CONIGLIO, 1997, p. 48).
- ZFC3 apresenta uma função (propriedade) φ que extrai os membros de um conjunto que satisfaz essa propriedade e constrói um novo conjunto. ZFC7 parece complementar esse axioma, no sentido que a função φ precisa ser descrita (expressa) e a função escolha não.
- É equivalente a ZFC7 o princípio da boa ordem: Todo conjunto admite uma boa ordem.

Buscando apresentar um panorama, relativo à natureza desses axiomas, podemos classificá-los da seguinte forma:

- Axiomas que dizem sobre o comportamento e/ou natureza de um conjunto: ZFC1 e ZFC2;
- Axiomas que permitem construir novos conjuntos: ZFC3, ZFC4, ZFC5 e ZFC7 (embora ele tenha um caráter altamente não construtivo)
- Axioma que garante a existência de certos conjuntos: ZFC6

A tensão entre a teoria axiomática dos conjuntos de Cantor e outras versões da teoria dos conjuntos, como a de Zermelo e Frankel, podem ser encontradas, cada qual com suas virtudes e defeitos, porém é inegável que Cantor foi primordial para os fundamentos da Matemática. Toda a perseguição por parte de seu antigo orientador Leopold Kronecker, fez com que ele nunca fosse reconhecido em vida e viesse a morrer de inanição durante a primeira guerra (IEZZI, 2004).

Componente 5: Teoremas

Na linguagem natural falamos muitos tipos de frases (sentenças). Às vezes, damos uma ordem, outras vezes fazemos uma pergunta e, às vezes, fazemos afirmações sobre um determinado assunto. A parte que nos interessa aqui são as afirmações declarativas. “Um teorema é uma afirmação declarativa sobre matemática para qual existe uma prova” (SCHEINERMAN, 2011, p. 10).

A forma como os teoremas são apresentados seguem uma estrutura lógica e é a materialização (inserção) mais clara da lógica de primeira ordem dentro dos conteúdos de matemática, excetuando-se seus axiomas que são apresentados na linguagem formal. A grande maioria dos teoremas tem algumas das seguintes formas:

- Se A (hipótese), então B (conclusão). Temos aqui a implicação;
- Se A, então B e se B, então A. Temos a dupla implicação

Dentro de uma teoria construída num sistema formal, temos:
- Definição 1: “Um teorema de uma teoria formal $\mathcal{L}$ é a última fórmula B de uma demonstração. Tal demonstração é dita demonstração ou prova de B”. (SANT’ANNA, 2005, p. 89).
- Definição 2: “Uma teoria formal $\mathcal{L}$ é dita decidível se existe procedimento efetivo para decidir se uma dada fórmula bem formada de $\mathcal{L}$ é um teorema de $\mathcal{L}$. Se esse procedimento efetivo não existir, então a teoria é dita indecidível”. (SANT’ANNA, 2005, p. 89).

Componente 6: Demonstração

Buscando fazer uma hierarquia, primeiro conceituamos as definições e então fazemos afirmações (teoremas, postulados etc.) sobre os objetos “dentro” da matemática. Precisamos dentro de esse mundo estabelecer o que é verdade e o que não é. A verdade na matemática tem particularidades que a distingue das demais ciências. Por exemplo, num sistema legal de justiça a verdade é estabelecida por meio de um julgamento e sua definição vem via um júri e/ou juiz. Ainda nesse sentido, podemos ter a verdade (consenso) estabelecido por meio de experimentos. Podemos ter a verdade filosófica que é algo inalterável a quaisquer circunstâncias, que afirma aquilo que é:

> Dionísio afirma tudo o que aparece, ‘mesmo o sofrimento mais áspero’ e aparece em tudo o que é afirmado. A afirmação múltipla ou pluralista, eis a essência do trágico. Compreenderemos melhor se pensarmos nas dificuldades que se

encontram para fazer de tudo um objeto de afirmação. (DELEUZE, 1962, p. 19)

Ao mesmo tempo, filosoficamente, não basta só a afirmação, é preciso um busca pelo que está oculto por trás das aparências ou das afirmações ditas verdadeiras, o que leva à conclusão de Deleuze: “A fórmula completa da afirmação é: o todo, sim, o ser universal, sim, mas o ser universal se diz de um só devir, o todo se diz de um só momento” (DELEUZE, 1962, p. 81-82). Logo, a verdade filosófica não possui um significado único, nem estático e definitivo, tendo influência de vários outros fatores.

Na matemática temos a demonstração (prova). Para situar a questão, vamos analisar a conjectura de Goldbach: Todo número inteiro maior que 2 é a soma de dois números primos. Um projeto da universidade de Aveiro, Goldbach conjecture verification (OLIVEIRA E SILVA; HERZOG; PARDI, 2018), já confirmou a conjectura até números da ordem de $4 \cdot 10^{17}$, ou seja temos um experimento extremamente bem sucedido e tudo indica que a conjectura é de fato verdadeira. Voltando para a declaração acima, temos a palavra “todo” e ela nos remete a ideia de $\forall$ (quantificador universal – “para todo”). Aqui reside a diferença entre o que é aceitável como prova na matemática em comparação com as demais ciências.

Tipos de demonstração:

1. Demonstração Direta: “consiste em, partindo das proposições $\alpha_1, \ldots, \alpha_1$ em um modelo $\mathfrak{M}$, usar as regras de inferência e as regras de equivalência até chegar na proposição β” (SANTOS, 2007, p. 74)
2. Demonstração Indireta Contrapositiva: “consiste em partir da premissa $\neg\beta$ em um modelo $\mathfrak{M}$ e usando as regras de inferência e as regras de equivalência chegar no argumento $\neg\alpha_1 \ldots \vee \neg\alpha_n$” (SANTOS, 2007, p. 75)
3. Demonstração Indireta por Redução ao Absurdo: “em um modelo $\mathfrak{M}$ consiste em demonstrar, usando as regras de inferência e as regras de equivalência, que $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ é uma contradição” (SANTOS, 2007, p. 75).

Podemos nos questionar se existe um limite para o que podemos provar ou será que existem conhecimentos que não nos é permitido ter? Para responder a uma pergunta matemática, é necessário que exista alguém que detenha todos os conhecimentos matemáticos sobre aquele objeto. Os matemáticos acreditam que em determinado momento se tem a matemática suficiente capaz de resolver todas as perguntas. Era isso que Hilbert defendia.

Componente 7: Incompletude

Entre a frase celebre de Hilbert, dada numa palestra na Universidade de Munster em 1926, onde afirmou que “Ninguém nos poderá expulsar do Paraíso que Cantor criou” e os teoremas da Incompletude de Gödel, passou somente 4 anos. Hilbert queria expressar com essa frase o seguinte: que era possível axiomatizar toda estrutura do conhecimento matemático e provar, por meios estritamente finitários, que essa axiomática é consistente (não produz contradições).

Gödel estudou os sistemas lógicos de forma abstrata, mas eles se aplicavam ao que Hilbert queria fazer, e foi demonstrado que num sistema lógico consistente, terá afirmações que não podem ser provadas e nem refutadas. Para ele, existem afirmações que não são verdadeiras e nem falsas.

O lógico Jakob Hintikka chamou o momento onde Gödel anunciou os Teoremas da Incompletude de "*Sternstunde* de Gödel" (sua hora da estrela), a palestra ocorreu em 7 outubro de 1930 em um congresso em Königsberg.

Segundo Goldstein (2008, p. 70),

> Gödel não deu nenhum sinal da revolução que ocultava sob a manga até o último dia do congresso, reservado à discussão geral dos artigos dos dois dias anteriores. Ele esperou até que a discussão geral estivesse bem avançada e, então, mencionou, numa única frase perfeita, que proposições aritméticas verdadeiras, mas não dedutíveis, eram possíveis, e ele provara que elas existiam.

Vamos aos famosos teoremas de Gödel, conforme Carnielli, Rathjen (1990, p. 4),

> 1° Teoremas da Incompletude: Em todo sistema formal consistente *S*, com um mínimo de aritmética, é possível formalizar uma sentença *U* tal que *U* possa ser interpretada intuitivamente como a afirmação de que ela própria é indemonstrável em *S*.
> 2° Teoremas da Incompletude: A prova da consistência para sistemas formais (nas condições que Hilbert queria) não pode ser formalizada dentro do próprio sistema.

Temos uma fundação de Matemática, mas existem afirmações que seguem as regras do jogo e onde não se pode provar nem que são verdadeiras e nem que são falsas. Por exemplo, a conjectura de Goldbach, apresentada acima, pode ser uma dessas afirmações. Outro problema famoso que escapou, até aqui, de ser provada ou refutado é a hipótese de Riemann.

À guisa de conclusão

Após essa revisão apresentando uma sistematização com sete componentes que tratou de elementos da filosofia, da lógica e da matemática, podemos então fazer todas as conexões necessárias para vislumbrar os fundamentos da Matemática e assim esboçar uma resposta razoável e que atinge o propósito central desse artigo.

Apresentada numa linguagem de primeira ordem e fundamentada na teoria axiomática dos conjuntos, a Matemática comunica os objetos da sua teoria por meios de suas definições e evolui e/ou consolida seus campos de atuação na medida em que são demonstrados novos teoremas, não sendo ela capaz de provar sua própria consistência e sendo "incompleta", pois abrigando em seu "mundo" objetos (afirmações) cuja verdade ou falsidade nada se pode dizer devido aos teoremas da incompletude de Gödel.

Para mostrar como os objetos são construídos na matemática usando os conceitos abordados nesse artigo, vamos responder a seguinte pergunta: O que é uma função? Desde o ensino fundamental trabalha-se com essa definição. Vamos esboçar uma demonstração:

1. Usando os axiomas de ZFC, podemos construir o conjunto $\{x, y\}$;
2. Por ZFC1 sabemos que $\{x, y\} = \{y, x\}$, então precisamos incrementar algo a mais;
3. Definimos um par ordenado como $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$, que é conhecido como par de Kuratowki;
4. Usando dois conjuntos A e B, onde podemos formar pares ordenados $\{x, y\}$, com x sendo elemento de A e y elemento de B. O conjunto de todos os pares ordenados é chamado de produto cartesiano e definido como: $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \,/\, x \in A \wedge y \in B\}$;
5. Uma relação (R) é um conjunto de pares ordenados e é chamada de relação binária entre dois conjuntos A e B, se R é um subconjunto de $A \times B$ (ex.: as desigualdades <, > são relações);
6. Uma função é uma relação com uma propriedade bem especial, a saber:

Uma relação R entre dois conjuntos A e B, onde para todo $(\forall)$ $x \in A$ existe um único $y \in B$ e $(x, y) \in R$

Aqui, mais uma vez, o sentido de uma Fundação de Matemática fica claro: Um objeto matemático como uma função representa um determinado conjunto dentro de ZFC. Veja que usamos várias das palavras chaves desse artigo e reduzimos a noção de função ao nível de um conjunto, onde está a base de toda a matemática.

Hilbert dizia que "ouvimos dentro de nós o chamado perpétuo: Lá está o problema. Procure sua solução. Você pode encontrá-la através da razão pura, pois em matemática não existe ignorabimus" (HILBERT, 1899). Poderia finalizar essa história com esse sentimento de tristeza ou derrota, já Kurt Gödel provou que os "ignorabimus" existem, mas podemos tomar o caminho que remete ao próprio Gödel, pois ele tinha o apelido de "senhor por quê", e a essência do aprender vem por meio de questionamentos. Contudo, vale lembrar que a quadratura do círculo levou mais de dois mil anos para ser solucionado.

A matemática é um mistério, e esses temas da inconsistência trazem inquietações filosóficas grandes, por exemplo, Galileu acreditava que a natureza era descrita em linguagem matemática. Será que a própria Matemática impõe obstáculos para seu próprio conhecimento? Ou será que os homens não atingiram o conhecimento suficiente para demonstrá-la completamente?

REFERÊNCIAS

Beth, E. W. (1953). On Padoa's method in the theory of definition. *Indagationes Mathematicae*, 15, 1953.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2012). *História da matemática* (H. Castro, Trans.). Blucher.

Carnielli, W. A., & Rathjen, M. (1990). Combinatória e indemonstrabilidade ou o 13° trabalho de Hércules. *Matemática Universitária*, (12).

Coniglio, M. E. (1997). *Teoria axiomática de conjuntos: Uma introdução*. GTAL – UNICAMP.

Costa, N. C. A. (1992). *Introdução aos fundamentos da matemática* (3rd ed.). Editora Hucitec.

Balestri, R. D. (2020). *A participação da história da matemática na formação de professores de matemática na óptica de professores/pesquisadores*. Ática.

Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton University Press.

Delahaye, J.-P. (2006). O infinito é um paradoxo na matemática? *Scientific American do Brasil: As diferentes faces do infinito*, Edição Especial, 15, 6-13.

Deleuze, G. (1962). *Nietzsche et la philosophie*. PUF.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1995). *Mil platôs: Capitalismo e esquizofrenia*. Editora 34.

Deleuze, G., & Guattari, F. (2010). *O que é a filosofia?* (3rd ed.). Editora 34.

Goldstein, R. (2008). *Incompletude: A prova e o paradoxo de Kurt Gödel*. Companhia das Letras.

Hilbert, D. (2021). *Grundlagen der Geometrie*. Teubner. Retrieved from https://www.worldcat.org/title/grundlagen-der-geometrie/oclc/1393576

Murakami, C., & Iezzi, G. (2004). *Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos, funções* (Vol. 1, 8th ed.). Atual.

Oliveira e Silva, T., Herzog, S., & Pardi, S. (2018). Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to 4·10^18. *Mathematics of Computation*, 83(288), 2033-2060. https://doi.org/10.1090/mcom/3310

Roque, T. (2012). *História da matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar.

Russell, B. (2007). *Introdução à filosofia matemática* (M. L. X. de A. Borges, Trans.; S. Jurkiewicz, Rev. Téc.). Jorge Zahar.

Sant'Anna, A. S. (2007). *O que é um conjunto*. Editora Manole.

Sant'Anna, A. S. (2005). *O que é uma definição*. Editora Manole.

Santos, J. C. L. (2007). *Fundamentos da matemática*. UFS - CESAD.

Scheinerman, E. R. (2011). *Matemática discreta: Uma introdução* (3rd ed.). Editora Cengage

Learning.

Silva, J. J. (2007). Platão e Aristóteles. In J. J. Silva, *Filosofias da matemática* (pp. 31-75). Ed. Unesp.

Tsounas, T. (2021). *Matemática fundacional para computação*. Instituto Metrópole Digital - UFRN.

Wolenski, J., & Kohler, E. (1999). Alfred Tarski and the Vienna Circle: Austro-Polish connections in logical empiricism. In *Logical Empiricism*. Kluwer Academic blishers.